第一題

1. (a) $5n^2-6n = \Theta(n^2)$

Let $f(n) = 5n^2-6n$, $g(n) = n^2$. If $f(n) = \Theta(g(n))$, then there exist positive constants c_1, c_2, n_0, such that $c_1*g(n) \leqq f(n) \leqq c_2*g(n)$ for $n \geqq n_0$.

(1) choose $c_1 = 3$, $c_2 = 6$

(i) $3 n_1^2 \leqq 5n_1^2-6n_1$

$\Rightarrow 2n_1^2 \geqq 6n_1$

$\Rightarrow n_1 \geqq 3, n_1 \neq 0$

(ii) $5n^2-6n_2 \leqq 6 n_2^2$

$\Rightarrow n_2^2 \geqq -6 n_2$

$\Rightarrow n_2 \geqq -6, n_2 \neq 0$

By (i) & (ii), take $c_1 = 3, c_2 = 6$, $n_0 = \max\{n_1,n_2\} = 3$, $3n^2 \leqq 5n^2-6n \leqq 6 n^2$ for $n \geqq 3$.

Prove by Mathematical Induction Method:

When $n = 3$

$3*3^2 \leqq 5*3^2 - 6*3$ holds.

Suppose $n = k$, $k>3$

$3*k^2 \leqq 5*k^2 - 6*k$ holds.

Consider $n = k+1$

$$\begin{aligned}3*(k+1)^2 &= \underline{3k^2}+6k+3 \\ &\leqq (\underline{5*k^2 - 6*k})+6k+3 \\ &= 5*k^2 + 3 \\ &= 5*k^2 + 10k+5-10k-2 \\ &= 5*(k+1)^2 -10k-2 \\ &\leqq 5*(k+1)^2 - 6(k+1), \ k>3\end{aligned}$$

By Mathematical Induction Method,

$3n^2 \leqq 5n^2-6n$ holds for $n \geqq 3$.

When $n = 3$

$5*3^2 - 6*3 \leqq 6*3^2$ holds.

Suppose $n = k$, $k>3$

$5*k^2 - 6*k \leqq 6*k^2$ holds.

Consider $n = k+1$

$$\begin{aligned}6*(k+1)^2 &= \underline{6k^2}+12k+6 \\ &\geqq (\underline{5*k^2 - 6*k})+12k+6 \\ &= 5*k^2 + 6k + 6 \\ &\geqq 5*k^2 + 4k - 1, \ k>3 \\ &= 5*k^2 + 10k + 5- 6k- 6 \\ &= 5*(k+1)^2 - 6(k+1)\end{aligned}$$

By Mathematical Induction Method,

$5n^2-6n \leqq 6n^2$ holds for $n \geqq 3$

(2) choose $c_1 = 2$, $c_2 = 8$

(i) $2n_1^2 \leqq 5n_1^2 - 6n_1$

$\Rightarrow 3n_1^2 \geqq 6n_1$

$\Rightarrow n_1 \geqq 2, n_1 \neq 0$

(ii) $5n^2 - 6n_2 \leqq 8n_2^2$

$\Rightarrow 3n_2^2 \geqq -6\, n_2$

$\Rightarrow n_2 \geqq -2, n_2 \neq 0$

By (i) & (ii), take $c_1 = 2, c_2 = 8$, $n_0 = \max\{n_1, n_2\} = 2$, $2n^2 \leqq 5n^2 - 6n \leqq 8n^2$ for $n \geqq 2$.

Prove by Mathematical Induction Method:

When $n = 2$

$2*2^2 \leqq 5*2^2 - 6*2$ holds.

Suppose $n = k$, $k>2$

$2*k^2 \leqq 5*k^2 - 6*k$ holds.

Consider $n = k+1$

$$
\begin{aligned}
2*(k+1)^2 &= \underline{2k^2}+4k+2 \\
&\leqq (\underline{5*k^2 - 6*k})+4k+2 \\
&= 5*k^2 - 2k + 2 \\
&\leqq 5*k^2 + 4k - 1,\ k>2 \\
&= 5*k^2 + 10k + 5 - 6k - 6 \\
&= 5*(k+1)^2 - 6(k+1),\ k>3
\end{aligned}
$$

By Mathematical Induction Method,

$2n^2 \leqq 5n^2 - 6n$ holds for $n \geqq 3$.

When $n = 2$

$5*2^2 - 6*2 \leqq 8*2^2$ holds.

Suppose $n = k$, $k>2$

$5*k^2 - 6*k \leqq 6*k^2$ holds.

Consider $n = k+1$

$$
\begin{aligned}
8*(k+1)^2 &= \underline{8k^2}+16k+8 \\
&\geqq (\underline{5*k^2 - 6*k})+16k+8 \\
&= 5*k^2 + 10k + 5 + 3 \\
&= 5*(k+1)^2 + 3 \\
&\geqq 5*(k+1)^2 - 6(k+1),\ k>3
\end{aligned}
$$

By Mathematical Induction Method,

$5n^2 - 6n \leqq 8n^2$ holds for $n \geqq 2$.

1. (b) $n! = O(n^n)$

Let $f(n) = n!$, $g(n) = n^n$. If $f(n) = O(g(n))$, then there exist positive constants c, n_0, such that $f(n) \leqq c*g(n)$ for $n \geqq n_0$.

(1) choose c = 1

$n! = n*(n-1)* \cdots *1 \leqq 1* n*n*\cdots*n = 1*n^n$, for $n_0 \geqq 1$.

=> $n! \leqq 1*n^n$, for $n_0 \geqq 1$.

=> $n! = O(n^n)$.

(2) choose c = 2

$n! = n*(n-1)* \cdots *1 \leqq 2* n*n*\cdots*n = 2*n^n$, for $n_0 \geqq 1$.

=> $n! \leqq 2*n^n$, for $n_0 \geqq 1$.

=> $n! = O(n^n)$.

Prove by Mathematical Induction Method:

(1) c = 1

When n = 1

$1! \leqq 1*1^1$ holds

Suppose n = k, k > 1

$k! \leqq 1*k^k$ holds

Consider n = k+1

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1)*\underline{k!}\\ &\leqq (k+1)*\underline{1*k^k}\\ &\leqq (k+1)*1*(k+1)^k\\ &= 1*(k+1)^{k+1}\end{aligned}$$

By Mathematical Induction Method,

$n! \leqq 1*n^n$ holds for $n \geqq 1$.

(2) c = 2

When n = 1

$1! \leqq 2*1^1$ holds

Suppose n = k, k > 1

$k! \leqq 2*k^k$ holds

Consider n = k+1

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1)*\underline{k!}\\ &\leqq (k+1)*\underline{2*k^k}\\ &\leqq (k+1)*2*(k+1)^k\\ &= 2*(k+1)^{k+1}\end{aligned}$$

By Mathematical Induction Method,

$n! \leqq 2*n^n$ holds for $n \geqq 1$.

1. (c) $2n^2+n\mathit{log}n = \Theta(n^2)$

Let $f(n) = 2n^2+n\mathit{log}n$, $g(n) = n^2$. If $f(n) = \Theta(g(n))$, then there exist positive constants c_1, c_2, n_0, such that $c_1*g(n) \leqq f(n) \leqq c_2*g(n)$ for $n \geqq n_0$.

(1) choose $c_1 = 1$, $c_2 = 3$

(i) $1*n_1^2 \leqq 2n_1^2+n_1\mathit{log}n_1$

$\Rightarrow n_1^2 \geqq -n_1\mathit{log}n_1$, $n_1 \neq 0$

$\Rightarrow n_1 \geqq 1$

(ii) $2n_2^2+n_2\mathit{log}n_2 \leqq 3*n_2^2$

$\Rightarrow n_2^2 \geqq n_2\mathit{log}n_2$, $n_2 \neq 0$

$\Rightarrow n_2 \geqq \mathit{log}n_2$

$\Rightarrow n_2 \geqq 1$

By (i) & (ii), take $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $n_0 = \max\{n_1,n_2\} = 1$, $1n^2 \leqq 2n^2+n\mathit{log}n \leqq 3n^2$ for $n \geqq 1$.

Prove by Mathematical Induction Method:

When n = 1

$1*1^2 \leqq 2*1^2+1*\mathit{log}1$ holds.

Suppose n = k, k>1

$1*k^2 \leqq 2k^2+k\mathit{log}k$ holds.

Consider n = k+1

$1*(k+1)^2 = \underline{1k^2} + 2k + 1$

$\leqq (\underline{2k^2 + k\mathit{log}k}) + 2k + 1$

$= (2k^2+2k+1) + k\mathit{log}k$

$\leqq (2k^2+4k+2)+k\mathit{log}(k+1)+ \mathit{log}(k+1)$, k>1

$= 2*(k+1)^2+(k+1)\,\mathit{log}(k+1)$

By Mathematical Induction Method,

$1*n^2 \leqq 2n^2+n\mathit{log}n$ holds for $n \geqq 1$.

When n = 3

$2*1^2 + 1*\mathit{log}1 \leqq 3*1^2$ holds.

Suppose n = k, k>1

$2*k^2 + k*\mathit{log}k \leqq 3*k^2$ holds.

Consider n = k+1

$3*(k+1)^2 = 2(k+1)^2 + (k+1)^{2(}$

$= 2(k+1)^2 + k^2 + 2k + 1$

$= 2(k+1)^2 + (\underline{3k^2-2k^2}) + 2k + 1$

$\geqq 2(k+1)^2 + \underline{k*\mathit{log}k} + 2k + 1$

$= 2(k+1)^2 + k*\,\mathit{log}k + k + k+1$

$= 2(k+1)^2 + k*(\mathit{log}k+1) + k+1$

$= 2(k+1)^2 + k*(\mathit{log}10k) + (k+1)$

$\geqq 2(k+1)^2 + k*\mathit{log}(k+1) + \mathit{log}\,(k+1)$, k>1

$= 2(k+1)^2 + (k+1)*\mathit{log}(k+1)$

By Mathematical Induction Method,

$2n^2+n\mathit{log}n \leqq 3*n^2$ holds for $n \geqq 1$.

(2) choose $c_1 = 3/2$, $c_2 = 4$

(i) $(3/2)*n_1^2 \leqq 2n_1^2+n_1 \log n_1$

$\Rightarrow n_1^2 \geqq -2n_1 \log n_1$, $n_1 \neq 0$

$\Rightarrow n_1 \geqq 1$

(ii) $2n_2^2+n_2 \log n_2 \leqq 4*n_2^2$

$\Rightarrow 2n_2^2 \geqq n_2 \log n_2$, $n_2 \neq 0$

$\Rightarrow n_2 \geqq (1/2) \log n_2$

$\Rightarrow n_2 \geqq 1$

By (i) & (ii), take $c_1 = 3/2$, $c_2 = 4$, $n_0 = \max\{n_1,n_2\}=1$, $1n^2 \leqq 2n^2+n \log n \leqq 3n^2$ for $n \geqq 1$.

Prove by Mathematical Induction Method:

When n = 1

$(3/2)*1^2 \leqq 2*1^2+1*\log 1$ holds.

Suppose n = k, k>1

$(3/2)*k^2 \leqq 2k^2+k \log k$ holds.

Consider n = k+1

$(3/2)*(k+1)^2 = \underline{(3/2)k^2} + 3k + (3/2)$

$\leqq (\underline{2k^2 + k \log k}) + 3k + (3/2)$

$= (2k^2+3k+(3/2)) + k \log k$

$\leqq (2k^2+4k+2)+k \log(k+1)+ \log(k+1)$, $k>1$

$= 2*(k+1)^2 +(k+1) \log(k+1)$

By Mathematical Induction Method,

$(3/2)*n^2 \leqq 2n^2+n \log n$ holds for $n \geqq 1$.

When n = 1

$2*1^2 + 1*\log 1 \leqq 4*1^2$ holds.

Suppose n = k, k>1

$2*k^2 + k*\log k \leqq 4*k^2$ holds.

Consider n = k+1

$4*(k+1)^2 = 2(k+1)^2 + 2(k+1)^2$

$= 2(k+1)^2 + \underline{2k^2} + 4k + 2$

$= 2(k+1)^2 + \underline{(4k^2-2k^2)} + 4k + 2$

$\geqq 2(k+1)^2 + \underline{k*\log k} + 4k + 2$

$= 2(k+1)^2 + k* \log k + k + 3k + 2$

$= 2(k+1)^2 + k*(\log k+1) + 3k + 2$

$= 2(k+1)^2 + k*(\log 10k) + (3k+2)$

$\geqq 2(k+1)^2 + k*\log(k+1) + \log(k+1)$, $k>1$

$= 2(k+1)^2 + (k+1)*\log(k+1)$

By Mathematical Induction Method,

$2n^2+n \log n \leqq 4*n^2$ holds for $n \geqq 1$.

評分標準：

每一小題　１５分（共４５分）

兩組 (c_1,c_2,n_0) 相異　：　１５　分
兩組 (c_1,c_2,n_0) 相同　：　１０　分
兩組的c_1(或c_2)相同　：　１３　分
一組 (c_1,c_2,n_0)　：　８　分
一組 (c_1,c_2,n_0) + 略錯　：　７　分

利用數學歸納法證明（兩組：５分，一組：３分）

證明其中一組(c_1,c_2,n_0)　：　３　分
證明其中一組(c_1,c_2,n_0) + 略錯　：　２　分

其餘不符題意者，斟酌給分！

建議：

基本上，同學只要列舉出兩組 (c_1,c_2,n_0) 均可拿到１５分，但對於asymptotic notation Θ and O 的定義仍需再加強，如其關係條件需在n大於或等於n_0之後均成立。
數學歸納法方面,則需引用 n=k (hypothesis phase) 時的情況去證明 n=k+1(induction phase)才為正確。因為數學歸納法是藉由假設 hypothesis phase 正確的情況下，而推導至下一步驟 induction phase ，若單單僅假設 hypothesis phase 正確後，卻利用其他方式去說明 induction phase 的正確性便失去了數學歸納法的本意！
數學歸納法是較為常用的證明方式，應用範圍極廣，請同學們可藉此機會多了解其作法，對於邏輯推導將會有所助益！

第二題

一、評分標準：

情況	分數
完全正確	55
不嚴重的小錯誤	50～53
較嚴重或較多的錯誤	45
嚴重錯誤	35～40
用 MAX_SIZE 來計算，不符合作業需求	35
無推導過程或過程不符合作業要求	15
只有短短幾句的簡單說明	10
突然蹦出答案	5
什麼都沒寫或不知道在幹嘛	0
備註： • 在上述的評分原則下，視實際情況可能會再作些微調。 • 在此作業中，程式語法上的問題會視爲不嚴重的錯誤。	

二、評語：

- 最常見的問題是沒有按照作業需求作答，作業需求有兩個重點：
  (1) A: m*n；B: n*p。很多同學直接假設 A 跟 B 都是 MAX_SIZE * MAX_SIZE。
  (2) Compute the performance by tabular method like Figure 1.4。部分同學是用其他方式。
- 同學們應養成好習慣，儘量使用符合 C/C++ 語法的程式寫法。此次作業中對於程式語法上的問題發生最多的包括：
  (1) 陣列表示法錯誤。例如寫在函式參數列中的 a[m][n]，第二個維度 n 一定要指定 (且在真正的程式中 n 必需是一個常數值)；而第一個維度 m 可省略。假設陣列 a 的維度是 m*n，你就不能在函式的參數列中寫 a[][MAX_SIZE]，一定要寫 a[][n]，因爲第二個維度所指定的大小會影響指標運算的正確性，給錯了會在執行階段發生記憶體存取違規。
  (2) for loop 的初始條件值與終止條件值錯誤。例如你要走訪一個陣列 a[m]，你的 for loop 必需寫 for(i = 0; i < m; i++) a[i] = 0; 而不能寫 for(i = 1; i <= m; i++) a[i] = 0; 這樣寫會造成記憶體存取違規，因爲 C/C++ 的陣列索引是從 0 起算。除非你寫成 for(i = 1; i <= m; i++) a[i-1] = 0;，但這不是有經驗的設計師慣用的寫法。
  (3) m, n, p 這三個值在程式中亂配，該填 n 的地方填 p 之類的，事實上這屬於嚴重的邏輯錯誤，但此次作業批改時將其視爲語法錯誤，只扣點小小分數，畢竟這不是程式語言的課，旨在提醒同學要小心這些小細節，

將來寫程式才不容易出錯。

- 有幾位同學實際撰寫了完整的程式來測試在不同的陣列維度下，程式真正的執行時間，並以圖表整理出結果，這是非常值得鼓勵的，在某些情況下這也會非常有幫助，但請注意程式的實測結果並不等於理論上的推導，還是得先滿足作業的要求比較重要!!
- 我們瞭解同學們沒有按照作業需求的規定來作答不代表你不會，這樣的問題也會有不同的解法，但爲了有給分的公平依據，請同學們見諒，也請下次寫作業時儘量注意配合。

三、參考解答：

Statement	s/e	Frequency	Total steps
void mult(int a[m][n], int b[n][p], int	0	0	0
c[m][p])	0	0	0
{	0	0	0
int i, j, k;	1	m+1	m+1
for(i = 0; i < m; i++)	1	m(p+1)	mp+m
for(j = 0; j < p; j++) {	1	mp	mp
c[i][j] = 0;	1	mp(n+1)	mpn+mp
for(k = 0; k < n; k++)	1	mpn	mpn
c[i][j] += a[i][k] *	0		0
b[k][j]; } }	0		0
Total			2mpn+3mp+2m+1